

שלבי חקירת פונקציה רציונלית:
דוגמא: נתונה הפונקציה $y = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$ בצע חקירה מלאה.

א. תחום הגדרה: אסור שהמכנה של השבר יתאפס:
 $x^2 - 4x + 3 \neq 0$
 $(x-3)(x-1) \neq 0 \rightarrow x_1 \neq 3, x_2 \neq 1$
תשובה: תחום ההגדרה הוא $x \neq 3, x \neq 1$.

תחום הגדרה: כדי למצוא תחום הגדרה משווים את המכנה ל-0 ומגלים מתי הפונקציה לא מוגדרת.

ב. חיתוך עם הצירים: חיתוך עם ציר ה-x: נציב $y = 0$ ונפתור
 $\frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0)$
 חיתוך עם ציר ה-y: נציב $x = 0$ ונפתור
 $y = \frac{0}{0-0+3} = 0 \rightarrow (0,0)$

חיתוך עם הצירים: מצייבים $x=0$ ומגלים את החיתוך עם ציר ה-y- מצייבים $y=0$ ומגלים את החיתוך עם ציר ה-x-

ג. אסימפטוטות:
אסימפטוטה אנכית: היות ושתי נקודות אי ההגדרה שמצאנו ב-'א' לא מאפסות את המונה, לכן תהייה בהן אסימפטוטות אנכיות:
 $x_1 = 3, x_2 = 1$
אסימפטוטה אופקית: החזקה המקסימלית במונה ובמכנה שווה, לכן נחלק את מקדם המונה, (במקרה שלנו שווה 1), בזה של המכנה (גם הוא שווה 1) ונקבל את האסימפטוטה:
 $y = \frac{1}{1} \rightarrow y = 1$
 צורת הכתיבה המקובלת היא:
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = 1 \rightarrow y = 1$

אסימפטוטות אנכיות: קיימות בנקודות אי הגדרה שנמצאו ב-'א' בתנאי שהן לא מאפסות את המונה (אם הן מאפסות יש בגרף חור ולא אסימפטוטה).
אסימפטוטות אופקיות: במידה והחזקה הגבוהה ביותר במונה שווה לחזקה הגבוהה ביותר במכנה מחלקים את מקדמי החזקות הנ"ל והתוצאה היא האסימפטוטה האופקית. במידה והחזקה המקסימלית במונה קטנה משל המכנה יש אסימפטוטה אופקית $y=0$. במידה והחזקה המקסימלית במונה גדולה משל המכנה אין אסימפטוטה אופקית.

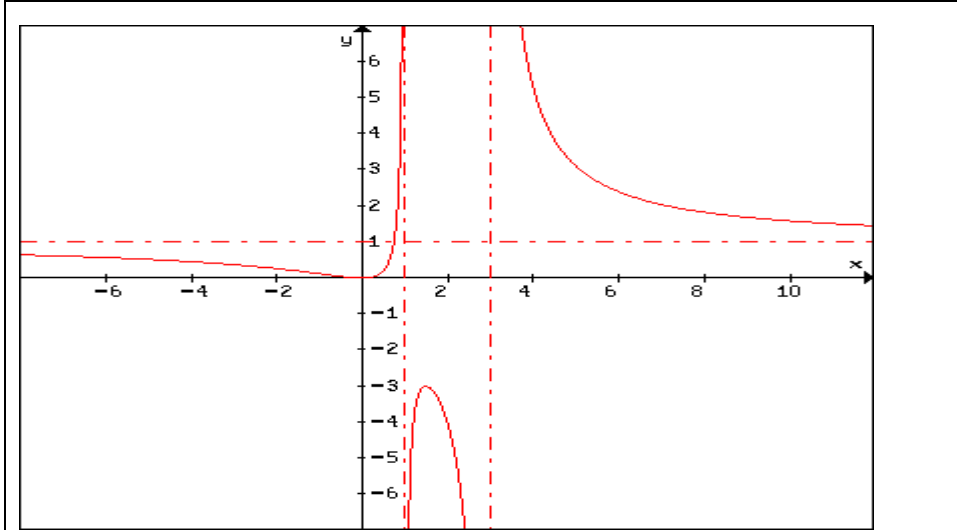
ד. נקודות קיצון ותחומי עליה וירידה:
שלב מקדים: נגזור נסדר ונשווה ל-0:
 $y' = \frac{2x(x^2 - 4x + 3) - x^2(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 3)^2} \rightarrow y' = \frac{-4x^2 + 6x}{(x^2 - 4x + 3)^2} = 0$
 $-4x^2 - 6x = 0 \rightarrow x \cdot (-4x + 6) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1.5$
 כעת נבנה את טבלת הקיצון ונציב בה את הנקודות החשודות: (שימו לב שמכניסים לטבלה גם את הנקודות בהן הפונקציה לא מוגדרת)

נקודות קיצון: נגזור את הפונקציה ונשווה ל-0 נבדוק מתי המונה מתאפס והתוצאה שנקבל היא נקודה חשודה כקיצון. אח"כ נגלה על ידי הצבה בפונקציה המקורית למה שווה ה-Y של הנקודות.

	0	1	1.5	3	4
x	-1	1/2	1.2	2	4
F'(x)	-	+	+	-	-
משמעות	↘	↗	↗	↘	↘

סיווג הנקודות ותחומי עלייה וירידה: נגלה באמצעות טבלה כאשר בין העמודות אנו כותבים את ה-X-ים בהם הפונקציה לא מוגדרת ואת ה-X-ים של הנקודות החשודות. הנקודות יופיעו בסדר עולה.
 בודקים את ערך הנגזרת "מימין" ו"משמאל" לכל נקודה וכך יודעים עם הפונקציה עולה או יורדת בכל תחום (כשהנגזרת שלילית הפונקציה יורדת וכשהיובית היא עולה). בנוסף נקודות קיצון שהתגלו בעזרת הנגזרת ישנן נקודות קיצון מקומיות בקצוות הגרף במידה והפונקציה מוגדרת בתחום סגור. במקרה זה פשוט בודקים האם בסביבת הקצה הנקודה היא מינימום מקומי, או שהיא מקסימום מקומי.

אי הגדרה Max אי הגדרה Min
 נבדוק את שיעורי ה-y של הנקודות שהתגלו כקיצון (באמצעות הצבת ה-x בפונקציה המקורית).
 $y_{(1.5)} = \frac{1.5^2}{1.5^2 - 4 \cdot 1.5 + 3} = 0 \rightarrow y = -3$ $y_{(0)} = \frac{0^2}{0^2 - 4 \cdot 0 + 3} = 0 \rightarrow y = 0$
 קיבלנו את התוצאות הבאות: (0,0) נקודת מינימום, (1.5,-3) נקודת מקסימום. (אין קצוות) תחומי עלייה וירידה: הפונקציה יורדת בתחומים: $x < 0, 1.5 < x < 3, 3 < x$
 הפונקציה עולה בתחומים: $0 < x < 1, 1 < x < 1.5$



שרטוט גרף: ראשית מסמנים את האסימפטוטות בקו מקווקו. לאחר מכן מסמנים את נקודות הקיצון ואת נקודות החיתוך עם הצירים ולבסוף משרטטים על פי הטבלה.
 לא לשכוח לשרטט את חלקי הגרף מימין ומשמאל לאסימפטוטות גם כשאין באזור זה נקודות קיצון.